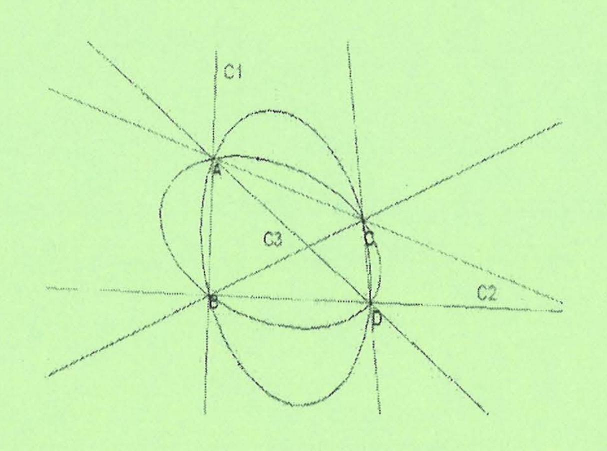
HACES DE CÓNICAS.CUÁDRICAS

por

EUGENIA ROSADO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-65-04

HACES DE CÓNICAS.CUÁDRICAS

por

EUGENIA ROSADO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-65-04

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

I ***Haces de cónicas. cuádricas***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestiòn y portada : Nadia Soddu.
CUADERNO 303.01 / 3-65-04
ISBN: 978-84-9728-326-57(obra completa)
ISBN-13: 978-84-9728-330-4
Depósito Legal: M- 7207-2010

Índice

1 Haces de cónicas

Como sabemos si r_1, r_2 son dos rectas distintas del plano, la ecuación

$$\lambda r_1 + \mu r_2 = 0$$

es la ecuación del haz de rectas que pasan por el único punto común de r_1 y r_2.

Si ahora consideramos cónicas en lugar de rectas, la situación es algo diferente.

Definición. Dadas dos cónicas $\bar{C}_1, \bar{C}_2 \subset \mathbb{P}_2$ definidas por las formas cuadráticas $\omega_1 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\omega_2 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ resp., con ecuaciones: $\bar{C}_1 \equiv X^t A_1 X = 0$ y $\bar{C}_2 \equiv X^t A_2 X = 0$, se llama *haz de cónicas determinado por* $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$ a la familia de cónicas determinadas por la formas cuadráticas:

$$\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

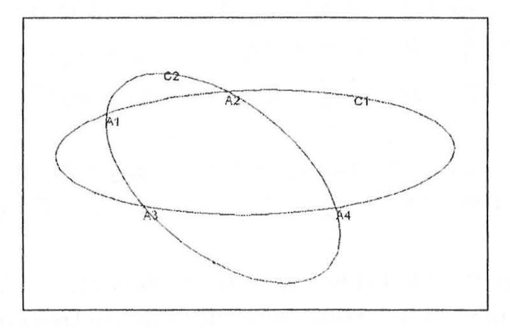
La ecuación de una cónica del haz es:

$$\bar{C}_{\lambda,\mu} \equiv X^t \left(\lambda A_1 + \mu A_2\right) X = 0,\ X \in \mathbb{P}_2.$$

A esta familia de cónicas pertenecen, en particular, las cónicas $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$, pues basta darle a los parámetros los valores $\lambda = 1, \mu = 0$ y $\lambda = 0, \mu = 1$, respectivamente.

Como las ecuaciones $X^t A_1 X = 0$ y $X^t A_2 X = 0$ son ambas cuadráticas, las dos cónicas base $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$, tienen o cuatro puntos en común (no necesariamente todos distintos), o una cantidad infinita de puntos comunes. Este último caso se da si ambas cónicas son la misma o si son cónicas degeneradas con una recta en común. Ambos casos son triviales y los excluiremos.

Observación. El haz de cónicas determinado por $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$ es simplemente la familia de cónicas que pasan por los cuatro puntos comunes de $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$.



Definición. Se llama *base de un haz de cónicas* al conjunto de los puntos de $\mathbb{P}_2$ que están en todas las cónicas del haz. Esto es, son los puntos comunes de las dos cónicas que determinan el haz.

Proposición. Un haz de cónicas en $\mathbb{P}_2$ contiene a lo más tres cónicas no regulares, a menos que el haz esté compuesto por cónicas todas ellas no regulares.

Ejemplo. Las cónicas $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 &\equiv x_0^2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_0x_2 = 0,\\ \bar{C}_2 &\equiv -x_1^2 + 2x_0x_2 = 0,\end{aligned}$$

nos proporcionan el haz

$$\lambda\bar{C}_1 + \mu\bar{C}_2 \equiv (x_0, x_1, x_2)\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2\lambda+\mu \\ 0 & 2\lambda-\mu & 0 \\ 2\lambda+\mu & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Las cónicas no regulares de este haz son las que cumplen

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2\lambda+\mu \\ 0 & 2\lambda-\mu & 0 \\ 2\lambda+\mu & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (2\lambda-\mu)\left(\lambda^2 - (2\lambda+\mu)^2\right).$$

Esto es, ó $\mu = 2\lambda$ ó

$$\lambda^2 = (2\lambda+\mu)^2 \iff \begin{cases} \lambda = 2\lambda+\mu \\ \lambda = -2\lambda-\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \mu = -3\lambda \end{cases}$$

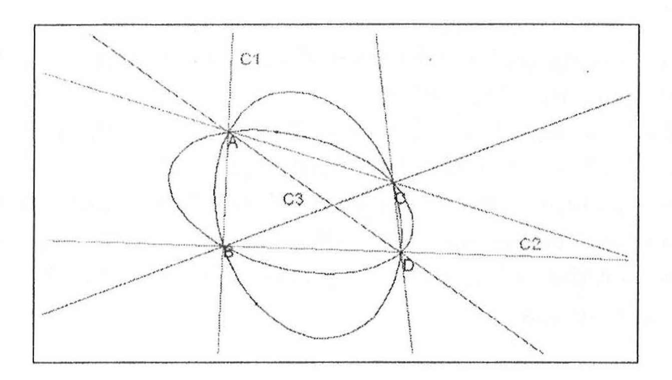
Las cónicas no regulares de este haz son las siguientes cónicas

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 + 2\bar{C}_2 &\equiv x_0^2 + 8x_0x_2 + x_2^2 = (x_0+4x_2)^2 - 15x_2^2\\ &= (x_0 + 4x_2 + 15x_2)(x_0 + 4x_2 - 15x_2) = 0,\\ \bar{C}_1 - \bar{C}_2 &\equiv x_0^2 + 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_2 = (x_0+x_2)^2 + 3x_1^2 = 0,\\ \bar{C}_1 - 3\bar{C}_2 &\equiv x_0^2 + 5x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 = (x_0-x_2)^2 + 5x_1^2 = 0.\end{aligned}$$

Luego, $\bar{C}_1 + 2\bar{C}_2$ es el par de rectas $x_0 + 4x_2 + 15x_2 = 0$, $x_0 + 4x_2 - 15x_2 = 0$, $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$ es el par de rectas $x_0 + x_2 = 0$, $x_1 = 0$ y $\bar{C}_1 - \bar{C}_2$ es el par de rectas $x_0 - x_2 = 0$, $x_1 = 0$.

Observación. Supongamos que los puntos base A, B, C, D de un haz son todos distintos. Entonces el haz contiene exactamente tres cónicas degeneradas que son los siguientes pares de rectas:

$$\bar{C}_1 \equiv r(A\cup B)r(C\cup D), \bar{C}_2 \equiv r(A\cup C)r(B\cup D), \bar{C}_3 \equiv r(A\cup D)r(B\cup C)$$



Proposición. Por un punto no básico del haz pasa únicamente una cónica del haz.

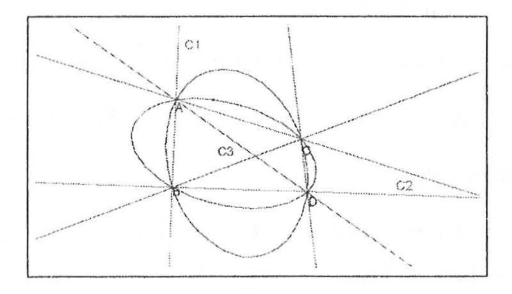
Definición. Los puntos singulares de las cónicas no regulares del haz se llaman *puntos fundamentales* del haz.

1.1 Posibles tipos de haces

En función de la multiplicidad de los cuatro puntos base del haz, tendremos distintos tipos de haces. Los discutiremos obteniendo los casos más singulares a partir del caso general.

1.1.1 Haz general: Cuatro puntos simples

El haz $\lambda\bar{C} + \mu\bar{C}'$ tiene cuatro puntos base distintos A, B, C y D. Por tanto, tiene tres cónicas no regulares: $\bar{C}_1 \equiv r(A \cup B)r(C \cup D)$, $\bar{C}_2 \equiv r(A \cup C)r(B \cup D)$, $\bar{C}_3 \equiv r(A \cup D)r(B \cup C)$. La situación es la de la siguiente figura:



Este tipo de haz lo utilizaremos para determinar una cónica cuando tengamos 5 puntos de la cónica o 4 puntos y otra condición, como por ejemplo ser de un determinado tipo o ser tangente a una recta dada, etc...

Ejemplo. Determinar la cónica que contiene a los puntos $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$, y $C(1,-1,0)$ y cuyo centro es $Z(2,1,0)$.

Como el centro Z es centro de simetría podemos calculos los puntos simétricos de los puntos A y B y así obtendremos dos puntos más de la cónica.

Tomamos las coordenadas del punto Z en la carta afín $x_0 = 1$. Por tanto, tomamos las coordenadas $(1, \frac{1}{2}, 0)$ de Z.

El simétrico de A es: $A' = 2Z - A = 2(1, \frac{1}{2}, 0) - (1, 0, 1) = (1, 1, -1)$ y el simétrico de B es $B' = 2Z - B = 2(1, \frac{1}{2}, 0) - (1, 1, 1) = (1, 0, -1)$.

Tenemos cuatro puntos de la cónica A, A', B, B' por tanto, podemos determinar el haz de cónicas que contiene a dichos puntos. Dos cónicas del haz son las cónicas degeneradas: $C_1 \equiv r(A \cup A')r(B \cup B')$ y $C_2 \equiv r(A \cup B)r(A' \cup B')$. Calculamos dichas rectas:

$$r(A \cup A') \equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - x_0 + x_2 = 0,$$

$$r(B \cup B') \equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - x_0 - x_2 = 0.$$

Luego $\bar{C}_1 \equiv (2x_1 - x_0 + x_2)(2x_1 - x_0 - x_2) = 0$. Y

$$r(A \cup B) \equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_2 - x_0 = 0,$$

$$r(A' \cup B') \equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -x_0 - x_2 = 0,$$

luego $\bar{C}_2 \equiv (x_2 - x_0)(x_0 + x_2) = 0$. El haz es:

$$\lambda \bar{C}_1 + \mu \bar{C}_2 \equiv \lambda (2x_1 - x_0 + x_2)(2x_1 - x_0 - x_2) + \mu (x_2 - x_0)(x_0 + x_2) = 0.$$

Como contiene al punto $C(1, -1, 0)$ se tiene que verificar:

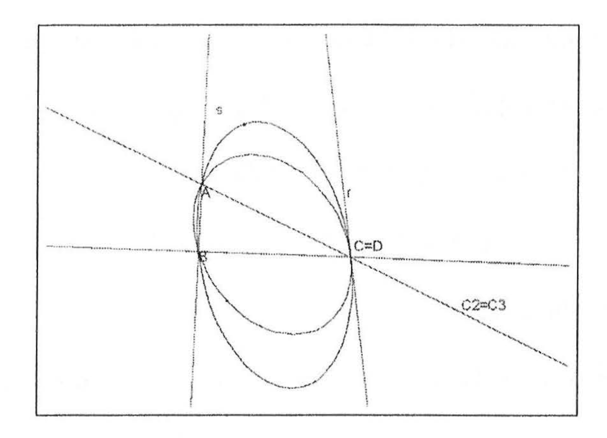
$$\lambda \bar{C}_1 + \mu \bar{C}_2 \equiv \lambda (-2 - 1)(-2 - 1) + \mu (-1) = 0 \Longrightarrow \mu = 9\lambda.$$

Luego la cónica pedida es:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 + 9\bar{C}_2 &\equiv (2x_1 - x_0 + x_2)(2x_1 - x_0 - x_2) + 9(x_2 - x_0)(x_0 + x_2) = 0 \\ &\equiv 4x_1^2 - 8x_0^2 - 4x_0x_1 + 8x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

1.1.2 Dos puntos simples y uno doble

El haz $\lambda \bar{C} + \mu \bar{C}'$ tiene tres puntos base A, B, C, uno de ellos, C, es un punto doble. Este caso se obtiene como caso límite del anterior (cuando $C = D$) y tiene dos cónicas no regulares: $\bar{C}_1 \equiv r(A \cup B)r(C \cup D) \equiv rs$, $\bar{C}_2 \equiv r(A \cup C)r(B \cup D)$ (la cónicas $\bar{C}_2$ y $\bar{C}_3$ del caso anterior coinciden). La situación es la de la siguiente figura:



La recta r es tangente a cualquier cónica regular del haz. El haz se puede plantear como:

$$\lambda r_1 r_2 + \mu r s = 0$$

donde r_1 es la recta que contiene a los puntos A y C y r_2 es la recta que contiene a los puntos B y C.

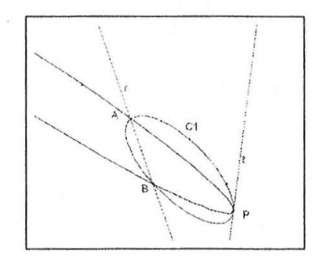
Este tipo de haz nos puede servir para problemas de determinación de cónicas cuando tengamos como datos: una tangente de la cónica y su punto de tangencia (sería la recta r de la figura) y que pase además por tres puntos o por dos puntos y algún dato más de la cónica como que sea de cierto tipo, o que sea tangente a cierta recta, etc...

Ejemplo. Determinar la cónica $\bar{C}$ que es tangente a la cónica $\bar{C}_1 \equiv -4x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 = 0$ en el punto $P(1,2,0)$, sabiendo que contiene al punto $Q(1,0,2)$ y que $\bar{C} \cap \bar{C}_1$ son los puntos de intersección de $\bar{C}_1$ con la recta $r \equiv -3x_0 + 2x_1 + x_2 = 0$.

El punto $P \in \bar{C}_1$ por tanto, su recta polar es la tangente a $\bar{C}_1$ en P. Calculamos la recta polar de P:

$$t \equiv (1,2,0) \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -4x_0 + 2x_1 = 0.$$

Por tanto tenemos la situación que muestra el dibujo:



Utilizamos el siguiente haz de cónicas: $\lambda\bar{C}_1 + \mu rt = 0$, esto es;

$$\lambda\left(-4x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2\right) + \mu\left(-3x_0 + 2x_1 + x_2\right)\left(-4x_0 + 2x_1\right) = 0.$$

Como $\bar{C}$ contiene al punto $Q(1,0,2)$ se verifica:

$$12\lambda + 4\mu = 0 \Longrightarrow \mu = -3\lambda.$$

Luego la cónica pedida es:

$$\bar{C} \equiv \left(-4x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2\right) - 3\left(-3x_0 + 2x_1 + x_2\right)\left(-4x_0 + 2x_1\right) = 0.$$

1.1.3 Un punto simple y uno triple

El haz $\lambda\bar{C}_1 + \mu\bar{C}_2$ tiene dos puntos base A, B, uno de ellos, B, es un punto triple. Este caso se obtiene como caso límite del anterior (cuando $B = C = D$) y tiene una cónica no regular: $\bar{C} \equiv rt$, donde la recta t es la recta tangente a las cónicas del haz en el punto triple B. Este tipo de haz nos puede servir para problemas de determinación de cónicas cuando la cónica buscada sea tangente a una cónica dada $\bar{C}_1$ en un punto B y pase por cierto punto A de la cónica $\bar{C}_1$ dada.

La cónica degenerada rt donde r es la recta que contiene a A y B y la recta t es la recta tangente a $\bar{C}_1$ en B (recta polar de B respecto de $\bar{C}_1$). Luego considerariamos el haz:

$$\lambda rt + \lambda t^2 = 0$$

Para determinar la cónica $\bar{C}_2$ necesitariamos algún dato más: que pase por un punto dado, etc...

Ejemplo. Determinar la cónica $\bar{C}$ tangente a la cónica $\bar{C}_1 \equiv -x_0^2 + x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_0x_2 = 0$ en el punto $P(1,1,0)$ y que contiene a los puntos $Q(1,-1,0) \in C_1$ y $R(1,2,1)$.

El punto $P \in \bar{C}_1$ por tanto, su recta polar es la tangente a $\bar{C}_1$ en P. Calculamos la recta polar de P:

$$t \equiv (1,1,0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_0 + x_1 - 2x_2 = 0.$$

Consideramos la recta que contiene a P y Q

$$r \equiv \det\begin{pmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & -1 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -2x_2 = 0.$$

Utilizamos el siguiente haz de cónicas: $\lambda rt + \mu t^2 = 0$; esto es,

$$\lambda\left(-x_0x_2 + x_1x_2 - 2x_2^2\right) + \mu = 0.$$

Como la cónica buscada contiene al punto $R(1,2,1)$ se verifica:

$$\lambda(-1+4-2+2) + \mu(-1+2-2) = 0 \Longrightarrow \mu = 3\lambda.$$

La cónica buscada es

$$\bar{C} \equiv -x_0^2 + x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_0x_2 + 3\left(-x_0x_2 + x_1x_2 - 2x_2^2\right) = 0.$$

1.1.4 Un punto de orden cuatro

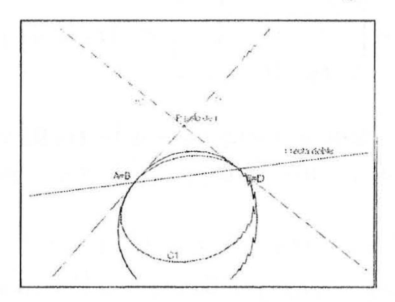
El haz $\lambda\bar{C}_1 + \mu\bar{C}_2$ tiene un punto base A de orden cuatro. Este tipo de haz lo utilizaremos cuando nos den una cónica $\bar{C}_1$ y nos pidan determinar otra sabiendo que, en un cierto punto $A \in \bar{C}_1$ estas cónicas tienen un contacto de tercer orden y además que es de cierto tipo, o pasa por un punto dado o es tangente a una recta dada.

El haz de cónicas tangentes a $\bar{C}_1$ en el punto A tiene la siguiente expresión:

$$\lambda\bar{C}_1 + \mu t^2 = 0.$$

1.1.5 Dos puntos dobles

En este caso la configuración del haz es la de la siguiente figura:



El haz tiene dos cónicas degeneradas: una es la formada por el par de rectas r_Ar_B y la otra es la formada por la recta de puntos dobles r. La ecuación del haz es

$$\bar{C}_{\lambda,\mu} \equiv \lambda r_Ar_B + \mu r^2 = 0.$$

La familia de todas las hipérbolas que tienen dos rectas r y s como asintotas, forman un haz de este tipo con ecuación:

$$\bar{C}_{\lambda,\mu} \equiv \lambda rs + \mu x_0^2 = 0.$$

Ejemplo. Determinar la cónica $\bar{C}$ tal que:

1. Pasa por el origen de la referencia y la tangente en él es la recta $r \equiv 6x_1 + x_2 = 0$.

2. Es tangente a la circunferencia $\bar{C}_1$ de centro $(4, -6)$ y radio 2 en el punto $Q(4, -4)$.

3. Los ejes de la cónica son paralelos a los ejes de coordenadas.

El origen de referencia es el punto $P\,[(1, 0, 0)]$ y la circunferencia dada es:

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 6)^2 = 4 \Longrightarrow 12x_2 - 8x_1 + x_1^2 + x_2^2 + 48 = 0.$$

En el plano proyectivo, la circunferencia tiene ecuación:

$$12x_0x_2 - 8x_0x_1 + x_1^2 + x_2^2 + 48x_0^2 = 0.$$

La tangente a $\bar{C}_1$ en el punto $Q\,[(1, 4, -4)]$ es

$$r_Q \equiv (1, 4, -4) \begin{pmatrix} 48 & -4 & 6 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 8x_0 + 2x_2 = 0.$$

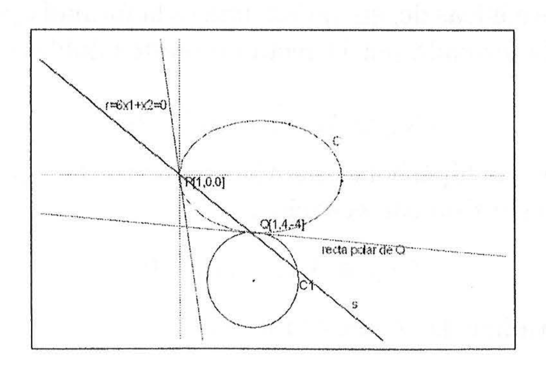
La recta que contiene a P y Q tiene ecuación:

$$s \equiv \det \begin{pmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 4 \\ x_2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 4x_1 + 4x_2 = 0.$$

Consideramos el haz de cónicas tangentes a la recta $r \equiv 6x_1 + x_2 = 0$ en el punto P y que contiene al punto P, $C_{\lambda,\mu} \equiv \lambda r \cdot r_Q + \mu s^2 = 0$, esto es,

$$\bar{C}_{\lambda,\mu} \equiv \lambda\,(6x_1 + x_2)\,(4x_0 + x_2) + \mu\,(x_1 + x_2)^2 = 0;$$

$$\text{esto es, } \bar{C}_{\lambda,\mu} \equiv \lambda\left(24x_0x_1 + 4x_0x_2 + 6x_1x_2 + x_2^2\right) + \mu\left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\right) = 0$$



La matriz del haz es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 12\lambda & 2\lambda \\ 12\lambda & \mu & 3\lambda + \mu \\ 2\lambda & 3\lambda + \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

Como los ejes de la cónica buscada son paralelos a los ejes de coordenadas la matriz

$$A_{00} = \begin{pmatrix} \mu & 3\lambda + \mu \\ 3\lambda + \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

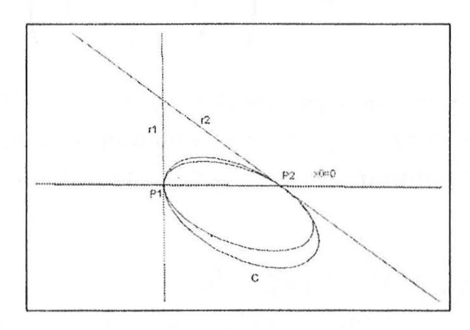
debe ser una matriz diagonal. Por tanto, $\mu = -3\lambda$. La cónica buscada tiene ecuación:

$$\bar{C} \equiv (6x_1 + x_2)(4x_0 + x_2) - 3(x_1 + x_2)^2 = 0.$$

1.1.6 Ejercicios

Ejercicio 1 Determinar la cónica $\bar{C}$ con asíntotas la recta $2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0$ y una recta paralela a la recta $x_1 = 0$ y tal que el punto $P[1, 1, 0]$ es polo de la recta $2x_1 + x_2 - 3x_0 = 0$ respecto de la cónica.

Solución Una recta paralela a la recta $x_1 = 0$ tiene ecuación: $bx_0 + x_1 = 0$. Por tanto, las asíntotas de $\bar{C}$ son las rectas $r_1 \equiv 2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0$ y $r_2 \equiv bx_0 + x_1 = 0$. La cónica $\bar{C}$ tiene dos puntos impropios P_1, P_2 pues tiene dos asíntotas distintas. Se tiene la situación que muestra la figura:



Por tanto, la cónica que buscamos está en el siguiente haz de cónicas:

$$\bar{C}_{\lambda,\mu} \equiv \lambda r_1 \cdot r_2 + \mu x_0^2 = 0;$$

$$\text{esto es, } \bar{C}_{\lambda,\mu} \equiv \lambda(2x_0 - x_1 - 2x_2)(bx_0 + x_1) + \mu x_0^2 = 0,$$

con matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} \mu + 2b\lambda & \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -b\lambda \\ \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -b\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Por último, como el punto P es polo de la recta $2x_1 + x_2 - 3x_0 = 0$ respecto de $\bar{C}$, se tiene que cualquier punto de dicha recta y el punto P son conjugados. Tomo los puntos $Q_1\,[(1,0,3)]$ y $Q_2\,[(0,1,-2)]$ de la recta. Como Q_1 y Q_2 son conjugados con P se tiene:

$$0 = (1,0,3)\begin{pmatrix} \mu + 2b\lambda & \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -b\lambda \\ \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -b\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\left(2 + \frac{3}{2}b\right)\lambda + \mu,$$

$$0 = (0,1,-2)\begin{pmatrix} \mu + 2b\lambda & \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -b\lambda \\ \lambda - \frac{b}{2}\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -b\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(2 + \frac{3}{2}b\right)\lambda.$$

De donde obtenemos que $\mu = 0$ y $b = -4/3$. La cónica es:

$$\bar{C} \equiv (2x_0 - x_1 - 2x_2)\left(-\frac{4}{3}x_0 + x_1\right) = 0.$$

Ejercicio 2 Determinar la cónica $\bar{C}$ que contiene al origen y tiene las mismas asíntotas que la cónica $\bar{C}_1 \equiv 2x_0^2 + 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_1 - 14x_1x_2 = 0$.

Solución La cónica $\bar{C}_1$ tiene matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -7 \\ 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

y es de tipo hiperbólico ya que $\det A_{00} = -9 - 49 < 0$. Por tanto, tiene dos puntos impropios P_1, P_2 que coinciden con los puntos impropios de la cónica a determinar. La cónica $\bar{C}$ es una cónica del haz que tiene por ecuación:

$$\bar{C}_{\lambda,\mu} \equiv \lambda C_1 + \mu x_0^2 = 0;$$
$$\text{esto es, } \bar{C}_{\lambda,\mu} \equiv \lambda\left(2x_0^2 + 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_1 - 14x_1x_2\right) + \mu x_0^2 = 0.$$

Como además contiene al origen, $O = [(1,0,0)]$, debe cumplirse que $2\lambda + \mu = 0$. Por tanto, la cónica buscada es

$$\bar{C} \equiv \lambda\left(2x_0^2 + 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_1 - 14x_1x_2\right) - 2\lambda x_0^2 = 0;$$
$$\text{esto es, } \bar{C} \equiv 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_1 - 14x_1x_2 = 0.$$

2 Cuádricas

Sea $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ el espacio proyectivo real tridimensional.

Definición. Una *cuádrica* $\bar{Q}$ en $\mathbb{P}_3$ determinada por una forma cuadrática $\omega\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{P}_3$ definido por:

$$\bar{Q} = \{X \in \mathbb{P}_3 \mid \omega(X) = 0\}$$

Sea $\mathcal{R} = \{O, B\}$ un sistema de referencia en $\mathbb{A}_3$ y sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a la forma cuadrática ω entonces

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid X^t A X = 0\} \\ &= \left\{ [(x_0, x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}_3 \mid \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0 \right\} \end{aligned}$$

La *cuádrica afín* definida por la forma cuadrática ω es el subconjunto Q de $\mathbb{A}_3$ definido por

$$Q = \{X \in \mathbb{A}_3 \mid \omega(\tilde{X}) = 0\},$$

donde $\tilde{X} = (1, x_1, x_2, x_3)$, con $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}_3$. Se cumple $Q \subset \bar{Q}$.

2.1 Puntos singulares y clasificación proyectiva

Sea $\bar{Q}$ una cuádrica proyectiva determinada por una forma cuadrática $\omega\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, con forma polar $f\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ y matriz asociada A respecto de cierto sistema de referencia.

Definiciones.

- Se dice que dos puntos $A, B \in \mathbb{P}_3$ son *conjugados* respecto de $\bar{Q}$ si $f(A, B) = 0$.
- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_3$ es un punto *autoconjugado* respecto de $\bar{Q}$ si $\omega(P) = f(P, P) = 0$.
- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_3$ es un *punto singular* de $\bar{Q}$ si es conjudado con cualquier punto de $\mathbb{P}_3$; esto es, $f(P, X) = 0$ para todo punto $X \in \mathbb{P}_3$. Esto es, si
$$f(P, X) = P^T A X = 0, \ \forall X \in \mathbb{P}_3,$$

o equivalentemente,

$$P^T A = 0.$$

- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_3$ es un *punto regular* de $\bar{Q}$ si no es un punto singular.

- La cuádrica $\bar{Q}$ es *no degenerada, regular u ordinaria* si no tiene puntos singulares.

- La cuádrica $\bar{Q}$ es *degenerada ó singular* si tiene algún punto singular.

Observaciones: Sea $\bar{Q}$ una cuádrica proyectiva generada por una forma cuadrática ω, con forma polar f y matriz asociada A.

1. Sea $\mathrm{Sing}(\bar{Q})$ el conjunto de puntos singulares de $\bar{Q}$; esto es,

$$\begin{aligned}\mathrm{Sing}(\bar{Q}) &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid f(X,Y) = 0, \text{ para todo } Y \in \mathbb{P}_3\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid AX = 0\}.\end{aligned}$$

   Se tiene

$$\dim(\mathrm{Sing}(\bar{Q})) = 3 - \mathrm{rg}(A).$$

2. Si $X \in \mathbb{P}_3$ es un punto singular, entonces $X \in \bar{Q}$.

   Demostración. Tenemos que comprobar que $\omega(X) = 0$. Se tiene $\omega(X) = f(X,X) = 0$ pues X es conjugado con cualquier punto, en particular con él mismo.

3. La recta determinada por un punto singular X y un punto cualquiera de la cuádrica, $Y \in \bar{Q}$, está contenida en la cúadrica.

   Demostración. Como X es singular sabemos que $\omega(X) = 0$ y $f(X,Y) = 0$ y como Y pertenece a la cuádrica $\omega(Y) = 0$. Un punto cualquiera de la recta determinada por X e Y es de la forma $Z = \lambda X + \mu Y$. Tenemos que comprobar que $\omega(Z) = 0$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\omega(Z) &= \omega(\lambda X + \mu Y) = f(\lambda X + \mu Y, \lambda X + \mu Y) \\ &= f(\lambda X, \lambda X + \mu Y) + f(\mu Y, \lambda X + \mu Y) \\ &= f(\lambda X, \lambda X) + f(\lambda X, \mu Y) + f(\mu Y, \lambda X) + f(\mu Y, \mu Y) \\ &= \lambda^2 f(X,X) + 2\lambda\mu f(X,Y) + \mu^2 f(Y,Y) \\ &= \lambda^2 \underbrace{\omega(X)}_{0} + 2\lambda\mu \underbrace{f(X,Y)}_{0} + \mu^2 \underbrace{\omega(Y)}_{0} = 0.\end{aligned}$$

4. La recta formada por dos puntos singulares tiene todos sus puntos singulares.

   Demostración. Sea $Z = \lambda X + \mu Y$ un punto cualquiera de la recta formada por dos puntos singulares X e Y. Tenemos que comprobar que $f(Z,T) = 0$, para todo $T \in \mathbb{P}_3$. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(Z,T) &= f(\lambda X + \mu Y, T) \\ &= f(\lambda X, T) + f(\mu Y, T) \\ &= \lambda \underbrace{f(X,T)}_{0} + \mu \underbrace{f(Y,T)}_{0} = 0. \end{aligned}$$

5. Si la cuádrica $\bar{Q}$ contiene un punto singular, entonces $\bar{Q}$ está formada por rectas que pasan por ese punto.

2.1.1 Clasificación proyectiva

1. Si $\det A \neq 0$, entonces la cuádrica $\bar{Q}$ es *ordinaria* o *no degenerada.*

2. Si $\det A = 0$, entonces la cuádrica $\bar{Q}$ es *degenerada.*

   (a) Si $\mathrm{rg}(A) = 3$, entonces $\bar{Q}$ tiene un único punto singular P.

   - Si P es un punto propio, entonces $\bar{Q}$ es un *cono* de vértice P.
   - Si P es un punto impropio, entonces $\bar{Q}$ es un *cilindro.*

   (b) Si $\mathrm{rg}(A) = 2$, entonces $\bar{Q}$ tiene una recta de puntos singulares y $\bar{Q}$ es un *par de planos* con intersección la recta de puntos singulares.

   (c) Si $\mathrm{rg}(A) = 1$, entonces $\bar{Q}$ tiene un plano de puntos singulares y $\bar{Q}$ es un *plano doble.*

2.2 Polaridad definida por una cuádrica

Sea $\bar{Q}$ una cuádrica con forma polar f y matriz asociada A. Sea $P \in \mathbb{P}_3$, llamamos *variedad polar* de P respecto de la cuádrica $\bar{Q}$ al conjunto de puntos conjugados de P; esto es ,

$$\begin{aligned} V_P &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid f(P,X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid P^t A X = 0\}. \end{aligned}$$

Si $P \in \mathbb{P}_3$ es un punto singular, entonces $V_P = \mathbb{P}_3$.

Si $P \in \mathbb{P}_3$ no es un punto singular, entonces V_P es un plano π_P y llamamos *plano polar* de P respecto de la cuádrica $\bar{Q}$:

$$\pi_P = \{X \in \mathbb{P}_3 \mid P^t A X = 0\}.$$

Definición. Dado un plano π del espacio $\mathbb{P}_3$, llamamos *polo* del plano π respecto de la cuádrica $\bar{Q}$ al punto cuyo plano polar es π; esto es, $\pi_P = \pi$.

Si la ecuación del plano π es

$$\pi \equiv u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = U^T X = 0,$$
$$\text{con } U = (u_0, u_1, u_2, u_3) \text{ y } X = (x_0, x_1, x_2, x_3),$$

entonces $\pi_P = \pi$ si y sólo si

$$P^T A X = U^T X, \text{ para todo } X \in \mathbb{P}_3$$

equivalentemente,

$$P^T A = U^T \iff AP = U.$$

Y si la cuádrica $\bar{Q}$ no es degenerada (por tanto, $\det A \neq 0$), entonces $P = A^{-1}U$.

Teorema. Si el punto P pertenece al plano polar de un punto R, entonces el punto R está en el plano polar de P.

Esto es debido a que la condición de conjugación $f(P, R) = 0$ es simétrica en P y R.

Como hemos visto, dada una cuádrica $\bar{Q}$, a cada punto P no singular, se le asigna un plano (su plano polar) y recíprocamente, a cada plano π se le asigna un punto (su polo).

Definición. Se llama *polaridad definida por una cuádrica* $\bar{Q}$ a la aplicación que a cada punto no singular de $\bar{Q}$ le hace corresponder su plano polar. Esto es,

$$\mathbb{P}_3 \setminus \text{Sing}(\bar{C}) \longrightarrow \text{Planos de } \mathbb{P}_3$$
$$P \longmapsto \pi_P$$

Teorema fundamental de la polaridad

Los planos polares de los puntos de un plano π de $\mathbb{P}_3$, respecto de una cuádrica regular $\bar{Q}$, pasan todas por un mismo punto que es precisamente el polo de π.

2.3 Intersección de recta y cuádrica

Sea $\bar{Q}$ una cuádrica proyectiva con forma polar f y matriz asociada A y sea r la recta proyectiva que contiene a los puntos $P = [(p_0, p_1, p_2, p_3)]$ y $Q = [(q_0, q_1, q_2, q_3)]$. Un punto $X \in \mathbb{P}_3$ está en la intersección de la cónica y la recta si y sólo si:

$$\left\{\begin{array}{l} X \in r \\ X \in \bar{Q} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = \lambda P + \mu Q \\ \omega(X) = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = \lambda P + \mu Q \\ \omega(\lambda P + \mu Q) = 0 \end{array}\right.$$

La condición $\omega(\lambda P + \mu Q) = 0$ se escribe:

$$0 = \lambda^2 \omega(P) + 2\lambda\mu f(P, Q) + \mu^2 \omega(Q).$$

Dividiendo la ecuación anterior por μ^2 y escribiendo $t = \lambda/\mu$ se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$0 = \omega(P)t^2 + 2f(P, Q)t + \omega(Q)$$

con discriminante

$$\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q).$$

- Si $f(P, Q) = 0$, $\omega(P) = 0$ y $\omega(Q) = 0$, entonces $P, Q \in \bar{Q}$ y, por tanto, $r \subset \bar{Q}$.

- Si no todos los coeficientes de la ecuación de segundo grado $0 = \omega(P)t^2 + 2f(P, Q)t + \omega(Q)$ son nulos, entonces hay dos puntos de corte (las dos soluciones de la ecuación).

   1. Si $\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) > 0$, la recta y la cuádrica se cortan en dos puntos reales distintos. La recta se dice que es una *recta secante* a la cuádrica.
   2. Si $\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) = 0$, la recta y la cuádrica se cortan en un punto doble. La recta se dice que es una *recta tangente* a la cuádrica.
   3. Si $\Delta = f(P, Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) < 0$, la recta y la cónica se cortan en dos puntos imaginarios distintos. La recta se dice que es una *recta exterior* a la cuádrica.

2.3.1 Variedad tangente a una cuádrica

Definición. La *variedad tangente* a una cuádrica $\bar{Q}$ en un punto $P \in \mathbb{P}_3$, es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{P}_3$ tales que la recta que une P y X es tangente a la cuádrica $\bar{Q}$; esto es,

$$\begin{aligned} T_P\bar{Q} &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid \text{recta } XP \text{ es tangente a } \bar{Q}\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid \Delta = f(P,X)^2 - \omega(P)\omega(X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid f(P,X)^2 = \omega(P)\omega(X)\}. \end{aligned}$$

Observaciones.

1. $T_P\bar{Q}$ es una cuádrica degenerada que tiene a P como punto singular.

2. Si $P \in \bar{Q}$ es un punto regular, entonces

$$\begin{aligned} T_P\bar{Q} &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid f(P,X)^2 = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_3 \mid P^tAX = 0\} \end{aligned}$$

   es un plano, llamado *el plano tangente a $\bar{Q}$ en P.* De hecho, coincide con el plano polar del punto P; esto es, $T_P\bar{Q} = \pi_p$.

3. Si $P \in \bar{Q}$ es un punto singular, entonces $T_P\bar{Q} = \mathbb{P}_3$.

2.4 Clasificación afín y elementos notables de las cuádricas

Sea $\overline{\mathbb{A}}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ el espacio afín proyectivizado, con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, B\}$. Y sea ω una forma cuadrática con matriz asociada A. Sea

$$\bar{Q} = \{X \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}^4) \mid \omega(X) = 0$$

una cuádrica proyectiva con cuádrica afín

$$Q = \bar{Q} \cap \mathbb{A}_3 = \{X \in \mathbb{A}_3 \mid \omega(\tilde{X}) = 0\}, \text{ donde } \tilde{X} = (1, x_1, x_2, x_3).$$

2.4.1 Centro de una cuádrica afín

Definición. Se llama *centro* de una cuádrica afín Q al polo del plano del infinito si ese punto es un punto propio (si no lo es, se dice que el centro de la cuádrica es impropio).

La ecuación del plano del infinito es $x_0 = 0$ y la ecuación de la cuádrica es $X^tAX = 0$. Por tanto, el polo del plano del infinito es el punto P tal que $P^tA = (1, 0, 0, 0)$.

Proposición. El centro de una cuádrica afín es centro de simetría. Cualquier recta que pase por el centro de una cuádrica corta a la cuádrica en dos puntos simétricos respecto del centro.

2.4.2 Posición relativa de la cuádrica y el plano del infinito

Sea $\pi_\infty \equiv x_0 = 0$ la ecuación del pano del infinito y sea la cuádrica proyectiva $\bar{Q}$ determinada por una forma cuadrática ω y con matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\bar{Q} \cap \pi_\infty = \{X \in \pi_\infty \mid \omega(X) = 0\} = \big\{(0, x_1, x_2, x_3) \mid X^t A X = 0\big\}$$

esto es,

$$\bar{Q} \cap \pi_\infty \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0,$$

luego $\bar{Q} \cap \pi_\infty$ es una cónica en el plano del infinito π_∞ con matriz

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Proposición. La cuádrica $\bar{Q}$ tiene centro si y sólo si $\det A_{00} \neq 0$. Además,

- Si $\det A_{00} \neq 0$, entonces la cónica $\bar{Q} \cap \pi_\infty$ es regular y $\bar{Q}$ tiene centro.
- Si $\det A_{00} = 0$, entonces la cónica $\bar{Q} \cap \pi_\infty$ es degenerada y $\bar{Q}$ no tiene centro.

2.4.3 Diámetros de una cuádrica

Definición. Se llama *diámetro* de una cuádrica $\bar{Q}$ a toda recta que contienen al centro de $\bar{Q}$.

Definición. Se llama *plano diametral* de una cuádrica $\bar{Q}$ a los planos que contienen al el centro de $\bar{Q}$.

Definición. Dos diámetros D y D' se dice que son *conjugados* si sus puntos impropios son conjugados.

Definición. Se llama *plano diametral polar de un diámetro* D al plano polar del punto impropio de D.

2.4.4 Ejes de una cuádrica con centro propio

Definición. Se llama *eje* de una cuádrica $\bar{Q}$ al diámetro que es perpendicular a su plano diametral polar.

Sea $\bar{Q}$ una cuádrica proyectiva con matriz asociada A. Y sea A_{00} la matriz de la cónica $\bar{Q} \cap \pi_\infty$. Como $\bar{Q}$ tiene centro propio Z, la matriz A_{00} es no singular, luego sus tres autovalores son no nulos λ_1, λ_2 y λ_3. Sean v_1, v_2 y v_3 los autovectores asociados a λ_1, λ_2 y λ_3 respectivamente (elegimos los autovectores ortogonales dos a dos). Los ejes $\bar{Q}$ son las rectas que pasan por el centro, Z, y tienen direcciones los vectores v_1, v_2 y v_3, respectivamente.

La referencia $\mathcal{R} = \{Z, (v_1, v_2, v_3)\}$ nos proporciona una referencia cartesiana autoconjugada.

Se pueden dar tres casos:

1. Los tres autovalores son distintos. Entonces $\bar{Q}$ tiene tres ejes que son ortogonales dos a dos.

2. Un autovalor es doble, $\lambda_1 = \lambda_2$, y el otro, λ_3, es simple. Entonces la dimensión del subespacio de autovectores asociado al autovalor doble es $\dim V_1 = 2$ y $\dim V_3 = 1$. Luego V_1 es un plano de ejes perpendiculares al eje V_3. En este caso la cuádrica $\bar{Q}$ es una cuádrica de revolución alrededor del eje correspondiente al autovalor λ_3.

3. Los tres autovalores coinciden, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Entonces cualquier diámetro es eje y la cuádrica es una esfera.

Definición. Se llaman *planos principales* de una cuádrica $\bar{Q}$ a los planos diametrales polares de los ejes.

2.4.5 Cono asintótico

Definición. Se llaman *asíntotas* de una cuádrica $\bar{Q}$ a las tangentes a la cónica en sus puntos impropios.

Sea $\bar{Q}$ una cuádrica proyectiva con centro propio Z.

Definición. La variedad tangente a la cuádrica $\bar{Q}$ desde el centro Z $[(z_0, z_1, z_2, z_3)]$ es un cono que recibe el nombre de *cono asintótico.* La ecuación del cono asintótico es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
f(Z,X)^2 - \omega(Z)\omega(X) = 0 &\iff (Z^tAX)(Z^tAX) - (Z^tAZ)(X^tAX) = 0 \\
&\iff x_0^2 - z_0(X^tAX) = 0 \\
&\iff x_0^2 - \frac{\det A_{00}}{\det A}(X^tAX) = 0
\end{aligned}
$$

equivalentemente

$$\frac{\det A}{\det A_{00}} x_0^2 - \bar{Q} = 0.$$

Las cuádricas de tipo elíptico tienen un cono asintótico imaginario y las cuádricas de tipo hiperbólico tienen un cono asintótico real.

Las *generatrices* del cono (rectas del cono) son los diámetros tangentes a la cuádrica.

Llamamos *plano asintótico* a los planos polares de los puntos de la cónica impropia de $\bar{Q}$ ($\bar{Q} \cap \pi_\infty = C$) (si existen).

Ejemplo 1. Sea la cuádrica $Q \equiv x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_3 + 2 = 0$.

La matriz de Q es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es $\det A = -20$, cuádrica con centro propio:

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\begin{cases} 2z_0 + z_3 = \rho \\ z_1 + 2z_2 = 0 \\ 2z_1 = 0 \\ z_0 + 3z_3 = 0 \end{cases}$$

El centro es: $Z\left[(1, 0, 0, -1/3)\right]$.

Ecuación del cono asintótico:

$$\frac{\det A}{\det A_{00}} x_0^2 - \bar{Q} = 0 \Longleftrightarrow \frac{20}{12} x_0^2 - (x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_3x_0 + 2x_0^2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2x_0x_3 + 4x_1x_2 + \frac{1}{3}x_0^2 + x_1^2 + 3x_3^2 = 0$$

2.5 Invariantes métricos de una cuádrica $\bar{Q}$

Sea la cúadrica $\bar{Q}$ con matriz asociada A; esto es, $\bar{Q} \equiv X^T A X = 0$. Son invariantes Euclideos de la cuádrica los siguientes valores:

- $\det A$

- Autovalores de A_{00}: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ o equivalentemente: $\det A_{00}$, $\operatorname{tr} A_{00} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ y

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ y } A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica de A_{00} es:

$$|A_{00} - \lambda I_3| = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A_{00}\lambda^2 - J\lambda + \det A_{00} = 0.$$

Por tanto, λ_1, λ_2 y λ_3 son las raíces de la ecuación $|A_{00} - \lambda I_3| = 0$.

Si $\det A_{00} \neq 0$, entonces la cónica $\bar{Q} \cap \pi_\infty$ es regular y $\bar{Q}$ tiene centro.

Si $\det A_{00} = 0$, entonces la cónica $\bar{Q} \cap \pi_\infty$ es no regular. Se trata de una cuádrica de género paraboloide, puede carecer de centro, tener una recta de centros o incluso poseer un plano de centros.

2.5.1 Clasificación de las cuádricas con $\det A_{00} \neq 0$.

Al ser $\det A_{00} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, en cierto sistema de referencia la matriz de la cuádrica es

$$\begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, la ecuación reducida de la cuádrica es $d_0x_0^2 + \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 = 0$ con $d_0 = \frac{\det A}{\det A_{00}}$ y se trata de cuádricas *con centro*.

Si $\det A = d_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ (esto es, $\operatorname{rg}(A) = 4$) entonces se trata de cuádricas *ordinarias*. Distinguimos dos casos: los autovalores de A_{00} tienen el mismo signo o dos tienen el mismo signo y el otro tiene signo opuesto.

1. Si $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) = \text{signo}(\lambda_3)$ $(+\,+\,+$ o $-\,-\,-)$, se dice que A_{00} tiene *signatura* 3, $\operatorname{sig} A_{00} = 3$, y pueden suceder los siguientes casos:

(a) Si signo(d_0) = signo(λ_1) = signo(λ_2) = signo(λ_3), entonces $\det A > 0$ y la ecuación reducida de la cuádrica es

$$-d_0x_0^2 = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 \underset{x_0=1}{\Longrightarrow} 1 = \frac{x_1^2}{-d_0/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{-d_0/\lambda_2} + \frac{x_3^2}{-d_0/\lambda_3}$$

y, llamando $a^2 = d_0/\lambda_1$, $b^2 = d_0/\lambda_2$ y $c^2 = \lambda_0/\lambda_3$ (pues son los tres positivos) tenemos

$$1 = -\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2}$$

que es un *elipsoide imaginario.*

(b) Si signo(d_0) $\neq$ signo(λ_1) = signo(λ_2) = signo(λ_3), entonces $\det A < 0$ y la ecuación reducida de la cuádrica es

$$-d_0x_0^2 = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 \underset{x_0=1}{\Longrightarrow} 1 = \frac{x_1^2}{-d_0/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{-d_0/\lambda_2} + \frac{x_3^2}{-d_0/\lambda_3}$$

y, llamando $a^2 = -d_0/\lambda_1$, $b^2 = -d_0/\lambda_2$ y $c^2 = -\lambda_0/\lambda_3$ (pues son los tres positivos) tenemos

$$1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}$$

luego la cuádrica es un *elipsoide*, y si además $a^2 = b^2 = c^2$ obtenemos una *esfera.*

2. Si signo(λ_1) = signo(λ_2) $\neq$ signo(λ_3) $(++-$ o $--+)$ se dice que A_{00} tiene *signatura* 1, sig $A_{00} = 2$, y pueden suceder los siguientes casos:

(a) Si signo(d_0) $\neq$ signo(λ_1) = signo(λ_2) $\neq$ signo(λ_3), entonces $\det A > 0$ y la ecuación reducida de la cuádrica es

$$-d_0x_0^2 = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 \underset{x_0=1}{\Longrightarrow} 1 = \frac{x_1^2}{-d_0/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{-d_0/\lambda_2} - \frac{x_3^2}{d_0/\lambda_3}$$

y, llamando $a^2 = -d_0/\lambda_1$, $b^2 = -d_0/\lambda_2$ y $c^2 = d_0/\lambda_3$ (pues son los tres positivos) tenemos

$$1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2}$$

Se trata de un *hiperboloide hiperbólico.*

(b) Si signo(d_0) = signo(λ_1) = signo$(\lambda_2) \neq$ signo(λ_3), entonces $\det A > 0$ y la ecuación reducida de la cuádrica es

$$-d_0x_0^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 \underset{x_0=1}{\Longrightarrow} 1 = -\frac{x_1^2}{d_0/\lambda_1} - \frac{x_2^2}{d_0/\lambda_2} + \frac{x_3^2}{-d_0/\lambda_3}$$

y, llamando $a^2 = d_0/\lambda_1$, $b^2 = d_0/\lambda_2$ y $c^2 = -d_0/\lambda_3$ (pues son los tres positivos) tenemos

$$1 = -\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}$$

La cuádrica es un *hiperboloide elíptico.*

Si $\det A = d_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$ (esto es, $d_0 = 0$ y $\mathrm{rg}(A) = 3$) entonces se trata de cuádricas con centro *degeneradas* de ecuación reducida $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$. Distinguimos dos casos: los tres autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 tienen el mismo signo o dos tienen el mismo signo y el otro tiene signo opuesto.

1. Si signo(λ_1) = signo(λ_2) = signo(λ_3) $(+ + +$ o $- - -)$, la ecuación reducida de la cuádrica es

$$0 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

y se trata de un *cono imaginario que pasa por el origen.*

2. Si signo(λ_1) = signo$(\lambda_2) \neq$ signo(λ_3) $(+ + -$ o $- - +)$, la ecuación reducida de la cuádrica es

$$0 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - \lambda_3 x_3^2$$

luego la cuádrica es un *cono.*

Cuadro de clasificación de las cuádricas con centro

$$\det A_{00} \neq 0 \begin{cases} \underset{\textbf{regulares}}{\mathrm{rg}(A) = 4} \begin{cases} \underset{\textbf{Elipsoides}}{\mathrm{sig}\, A_{00} = 3} \begin{cases} \det A > 0 & \textbf{imaginario} \\ \det A < 0 & \textbf{real} \end{cases} \\ \underset{\textbf{Hiperboloides}}{\mathrm{sig}\, A_{00} = 1} \begin{cases} \det A > 0 & \textbf{hiperbólico} \\ \det A < 0 & \textbf{elíptico} \end{cases} \end{cases} \\ \underset{\textbf{Conos}}{\mathrm{rg}(A) = 3} \begin{cases} \mathrm{sig}\, A_{00} = 3 & \textbf{Cono imaginario con un punto real} \\ \mathrm{sig}\, A_{00} = 1 & \textbf{Cono real} \end{cases} \end{cases}$$

2.5.2 Clasificación de las cuádricas con $\det A_{00} = 0$.

Al ser $\det A_{00} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, en cierto sistema de referencia la matriz de la cuádrica es

$$\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{01} & b_{11} & 0 & 0 \\ b_{02} & 0 & b_{22} & 0 \\ b_{03} & 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

y, al ser $\det A_{00} = b_{11}b_{22}b_{33} = 0$, al menos uno de los coeficientes b_{ii} $(i = 1, 2, 3)$ ha de ser nulo. Supongamos $b_{33} = 0$, por tanto, $J = b_{11}b_{22}$. La ecuación reducida de la cuádrica es

$$0 = b_{00}^2 x_0^2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + 2b_{03}x_0x_3$$

y $\det A = -b_{03}^2 b_{11}b_{22}$.

Si $J = b_{11}b_{22} \neq 0$ distinguimos varios casos.

1. Si $\det A \neq 0$ (esto es, $b_{03} \neq 0$) tenemos

   (a) Si signo(b_{11}) = signo(b_{22}), esto es $J > 0$, la ecuación reducida de la cuádrica es
   $$0 = 2b_{03}x_0x_3 + p_1^2x_1^2 + p_2^2x_2^2$$
   luego la cuádrica es un *paraboloide elíptico.*

   (b) Si signo(b_{11}) $\neq$ signo(b_{22}), esto es $J < 0$, la ecuación reducida de la cuádrica es (suponiendo $b_{11} > 0$)
   $$0 = 2b_{03}x_0x_3 + p_1^2x_1^2 - p_2^2x_2^2$$
   luego la cuádrica *paraboloide hiperbólico.*

2. Si $\det A = 0$ (esto es, $b_{03} = 0$) la ecuación reducida de la cuádrica es
   $$0 = p_0x_0^2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$$
   y distinguimos varios casos

   (a) Si $p_0 \neq 0$ tenemos

      i. Si signo(b_{11}) = signo(b_{22}), esto es $J > 0$, la ecuación reducida de la cuádrica es
      $$0 = p_0x_0^2 + p_1^2x_1^2 + p_2^2x_2^2.$$

A. es *cilindro elíptico imaginario* ($p_0 > 0$) ó *cilindro elíptico* ($p_0 < 0$).

ii. Si signo(b_{11}) $\neq$ signo(b_{22}), esto es $J < 0$, la ecuación reducida de la cuádrica es

$$0 = p_0 x_0^2 + p_1^2 x_1^2 - p_2^2 x_2^2.$$

la cuádrica es un *cilindro hiperbólico.*

(b) Si $b_{00} = 0$ la ecuación reducida de la cuádrica es $0 = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$.

i. Si signo(b_{11}) = signo(b_{22}), esto es $J > 0$, la cuádrica es un *par de planos imaginarios que se cortan* y su ecuación reducida es

$$0 = p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2.$$

ii. Si signo(b_{11}) $\neq$ signo(b_{22}), esto es $J < 0$, la cuádrica es un *par de planos que se cortan* y su ecuación reducida es

$$0 = p_1^2 x_1^2 - p_2^2 x_2^2.$$

Si $J = 0$ ($b_{22} = b_{33} = 0$). Tenemos $\det A = 0$, $\det A_{00} = 0$, $J = 0$ y $\operatorname{tr} A_{00} = b_{11}$. Consideramos un nuevo invariante

$$J' = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{03} \\ a_{03} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se cumple que $J' = b_{00}b_{11}$ y la ecuación reducida de la cuádrica es $b_{00} + b_{11}x_1^2 = 0$.

1. Si $b_{00} \neq 0$ (esto es, $J' \neq 0$) tenemos

   (a) Si signo(b_{00}) = signo(b_{11}), esto es $J' > 0$, la cuádrica es un *par de planos imaginarios paralelos* y su ecuación reducida es $0 = p_0^2 x_0^2 + p_1^2 x_1^2$.

   (b) Si signo(b_{00}) $\neq$ signo(b_{11}), esto es $J' < 0$, la cuádrica es un *par de planos paralelos* y su ecuación reducida es $0 = p_0^2 x_0^2 - p_1^2 x_1^2 = (p_0 x_0 - p_1 x_1)(p_0 x_0 + p_1 x_1)$.

2. Si $b_{00} = 0$ (esto es, $J' = 0$) tenemos $b_{11}x_1^2 = 0$ ($\Rightarrow x_1^2 = 0$) y se trata de un *par de planos coincidentes.*

Cuadro de clasificación de las cuádricas con $\det A_{00} = 0$

$$\det A_{00} = 0 \begin{cases} \underset{\text{regulares}}{\mathrm{rg}(A) = 4} \begin{cases} J > 0 & \text{Paraboloide elíptico} \\ J < 0 & \text{Paraboloide hiperbólico} \end{cases} \\ \underset{\text{cilindros}}{\mathrm{rg}(A) = 3} \begin{cases} J > 0 & \text{Cilindro elíptico real} \\ J < 0 & \text{Cilindro hiperbólico} \\ J = 0 & \text{Cilindro parabólico} \end{cases} \\ \underset{\text{par de planos}}{\mathrm{rg}(A) = 2} \begin{cases} J > 0 & \text{Par de planos imaginarios (recta)} \\ J < 0 & \text{Par de planos secantes} \\ J = 0 & \text{Par de planos paralelos} \begin{cases} \text{imaginarios} \\ \text{reales} \end{cases} \end{cases} \\ \mathrm{rg}(A) = 1 \quad \text{plano doble} \end{cases}$$

3 Bibliografía

1. J. M. Aroca Hernández-Ros, M. J. Fernández Bermejo, *Notas de Geometría Proyectiva*, Universidad de Valladolid, 2002.

2. F. Etayo Gordejuela, *Apuntes de Geometría Proyectiva*, Universidad de Cantabria.

3. G. T. Kneebone, J. G. Semple, *Algebraic projective geometry*, Springer-Verlag, 1988.

4. J. L. Pinilla, *Lecciones de programación lineal-cónicas-cuádricas-supercies*, Ed. Varicop, Madrid, 1971.

NOTAS

CUADERNO

303.01

cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

